Quadratische Gleichungen

x^2

Bisher haben wir nur Gleichungen kennengelernt, die ein „einfaches" x beinhalten:

$$x + 9 = 17 \quad | -9$$

$$x = 8$$

Quadratische Gleichungen x^2

Bisher haben wir nur Gleichungen kennengelernt, die ein „einfaches“ x beinhalten:

$$x + 9 = 17 \quad | -9$$

$$x = 8$$

Diese Gleichungen konnten auch komplizierter aussehen:

$$2x - 26 + 5x = 4x + 12 - 7x$$

Quadratische Gleichungen x^2

Nachdem wir die

quadratischen <u>Funktionen</u>

kennengelernt haben,
wollen wir uns nun mit den

quadratischen <u>Gleichungen</u>

beschäftigen.

Quadratische Gleichungen x^2

Die einfachste Form der quadratischen Gleichung ist die folgende:

$$x^2 = 16$$

Wie können wir diese Gleichung lösen?

Quadratische Gleichungen x^2

Die einfachste Form der quadratischen Gleichung ist die folgende:

$$x^2 = 16$$

Um herauszufinden, wie groß x ist, müssen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = ???$$

Um herauszufinden, wie groß x ist, müssen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 4$$ *(Das ist aber nur die halbe Wahrheit !!!)*

Warum???

Um herauszufinden, wie groß x ist, müssen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 4$$

Richtig ist auch die Lösung x = - 4

Warum???

Um herauszufinden, wie groß x ist, müssen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 4$$ ***(Das ist aber nur die halbe Wahrheit !!!)***

Richtig ist auch die Lösung $x = -4$

Wenn wir die Lösungen 4 und -4 quadrieren, ergeben beide Rechnungen 16.

Um herauszufinden, wie groß x ist, müssen wir aus beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 4$$ ***(Das ist aber nur die halbe Wahrheit !!!)***

Richtig ist auch die Lösung $x = -4$

Wenn wir die Lösungen 4 und -4 quadrieren, ergeben beide Rechnungen 16.

Lösung ist also: $x_{1/2} = \pm 4$

Ein weiteres Beispiel:

$$4x^2 = 100 \quad | \; ???$$

Ein weiteres Beispiel:

$$4x^2 = 100 \quad | :4$$

$$x^2 = 25 \quad | ???$$

Ein weiteres Beispiel:

$$4x^2 = 100 \quad | :4$$

$$x^2 = 25 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm 5$$

Und ein drittes Beispiel:

$$5x^2 = 100 \quad | \; ???$$

Und ein drittes Beispiel:

$$5x^2 = 100 \quad | :5$$

$$x^2 = 20 \quad | ???$$

Und ein drittes Beispiel:

$$5x^2 = 100 \quad | :5$$

$$x^2 = 20 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{20}$$

oder:

$$x_{1/2} = \pm 4{,}47$$

Und Nummer vier:

$$2x^2 - 17 = 145 \quad | \; ???$$

Und Nummer vier:

$$2x^2 - 17 = 145 \quad | +17$$

$$2x^2 = 162 \quad | ???$$

Quadratische Gleichungen x^2

Und Nummer vier:

$$2x^2 - 17 = 145 \quad | +17$$

$$2x^2 = 162 \quad | :2$$

$$x^2 = 81 \quad | ???$$

Und Nummer vier:

$$2x^2 - 17 = 145 \quad | +17$$

$$2x^2 = 162 \quad | :2$$

$$x^2 = 81 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm 9$$

Quadratische Gleichungen x^2

Diese Methode hilft uns aber nicht weiter, wenn die Gleichung folgendes Aussehen hat:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Die Variable kommt hier zweimal vor:

einmal mit Quadrat und einmal ohne Quadrat.

Um eine solche Gleichung zu lösen, haben wir mehrere Möglichkeiten:

Quadratische Gleichungen x^2

1. Zeichnerische Lösung:

Dazu isolieren wir x^2 vom Rest der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
x^2 + x - 6 &= 0 \qquad &|-x \\
x^2 - 6 &= -x \qquad &|+6 \\
x^2 &= -x + 6
\end{aligned}
$$

1. Zeichnerische Lösung:

Dazu isolieren wir x^2 vom Rest der Gleichung:

$$x^2 + x - 6 = 0 \qquad |-x$$

$$x^2 - 6 = -x \qquad |+6$$

$$x^2 = -x + 6$$

Dann fassen wir die linke und die rechte Seite jeweils als eine Funktion auf:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x + 6$$

1. Zeichnerische Lösung:

Dann fassen wir die linke und die rechte Seite jeweils als eine Funktion auf:

$$f(x) = x^2$$

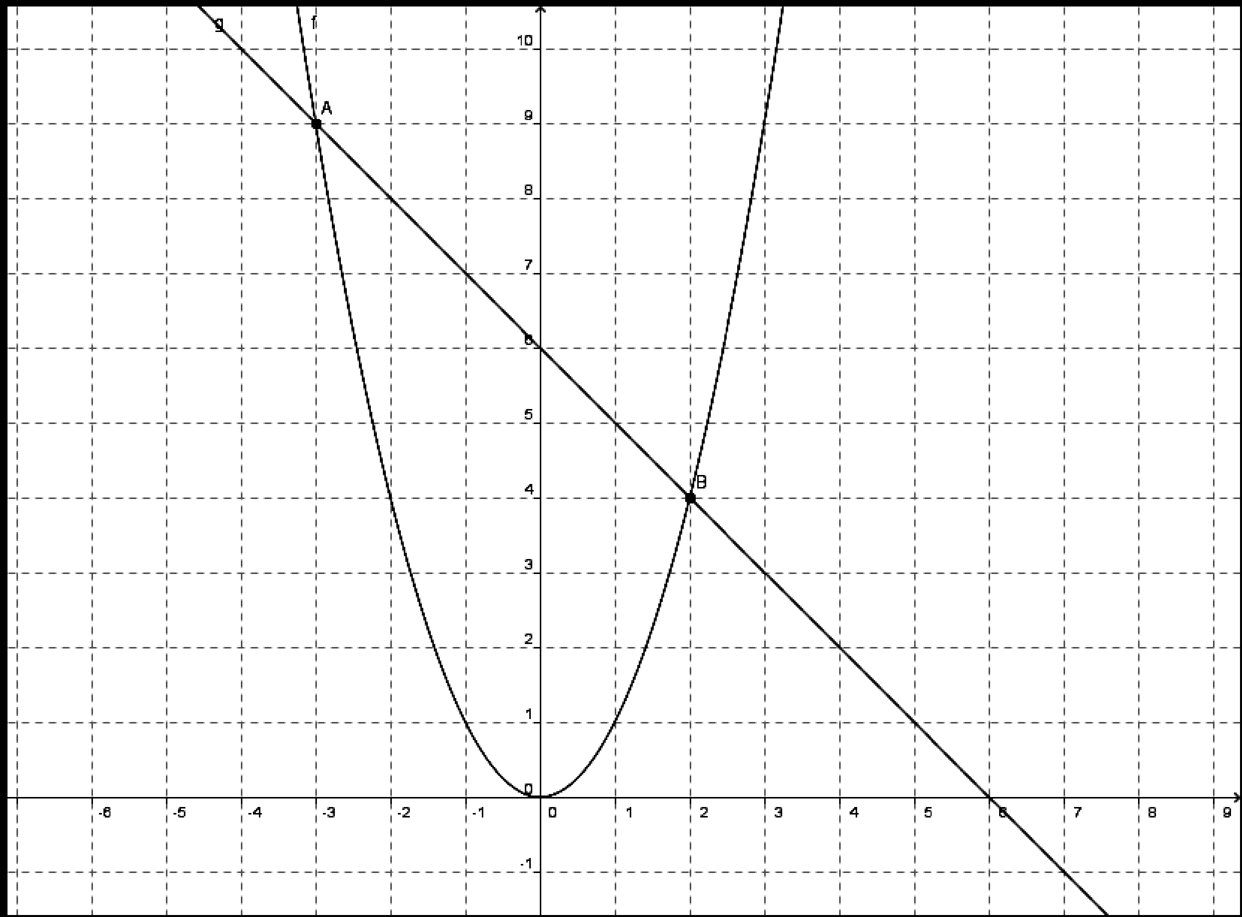
$$g(x) = -x + 6$$

Diese Funktionen übertragen wir in ein Koordinatensystem.

Quadratische Gleichungen x^2

1. Zeichnerische Lösung:

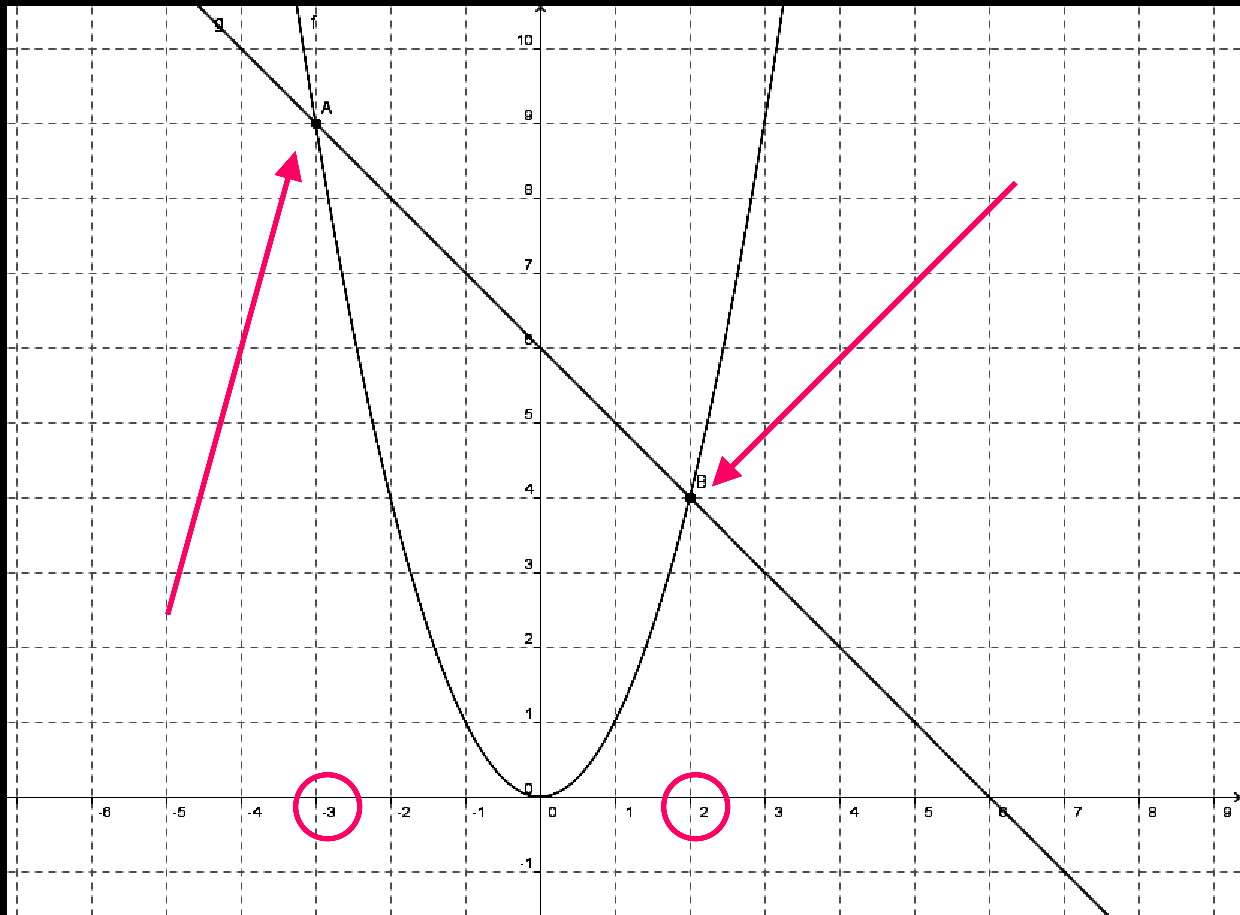
$f(x) = x^2$
und
$g(x) = -x + 6$



Quadratische Gleichungen x^2

1. Zeichnerische Lösung:

$f(x) = x^2$
und
$g(x) = -x + 6$



Die Schnittpunkte sind die Lösungen:

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

Hierzu muss die quadratische Gleichung in der Normalform gegeben sein:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Beispiel:

$$x^2 + 12x - 13 = 0$$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \qquad | + 13$$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \qquad | +13$$

$$x^2 + 12x = 13$$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \quad | + 13$$

$$x^2 + 12x = 13$$

DER Faktor $\quad x^2 + 12x = 13$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \qquad | +13$$

$$x^2 + 12x = 13$$

DER Faktor $\qquad x^2 + 12x = 13$

DIE Hälfte $\qquad x^2 + 12x + 6$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

	$x^2 + 12x - 13 = 0$	$\mid +13$
	$x^2 + 12x = 13$	
DER Faktor	$x^2 + 12x = 13$	
DIE Hälfte	$x^2 + 12x + 6$	
Das Quadrat	$x^2 + 12x + 6^2$	

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + 12x - 13 = 0 \qquad | + 13$$

$$x^2 + 12x = 13$$

DER Faktor $\quad x^2 + 12x = 13$

DIE Hälfte $\quad x^2 + 12x + 6$

Das Quadrat $\quad x^2 + 12x + 6^2$

rechte Seite: $\quad x^2 + 12x + 6^2 = 13 + 6^2$

Quadratische Gleichungen x^2

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

	$x^2 + 12x - 13$	$= 0$	$\mid +13$
	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DER Faktor	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DIE Hälfte	$x^2 + 12x + 6$		
Das Quadrat	$x^2 + 12x + 6^2$		
rechte Seite:	$x^2 + 12x + 6^2$	$= 13 + 6^2$	
1. Bin. Formel	$(x + 6)^2$	$= 49$	$\mid \sqrt{}$

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

	$x^2 + 12x - 13$	$= 0$	$\mid + 13$
	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DER Faktor	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DIE Hälfte	$x^2 + 12x + 6$		
Das Quadrat	$x^2 + 12x + 6^2$		
rechte Seite:	$x^2 + 12x + 6^2$	$= 13 + 6^2$	
1. Bin. Formel	$(x + 6)^2$	$= 49$	$\mid \sqrt{}$
	$x + 6$	$= \pm 7$	$\mid - 6$

Quadratische Gleichungen x^2

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

	$x^2 + 12x - 13$	$= 0$	$\mid + 13$
	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DER Faktor	$x^2 + 12x$	$= 13$	
DIE Hälfte	$x^2 + 12x + 6$		
Das Quadrat	$x^2 + 12x + 6^2$		
rechte Seite:	$x^2 + 12x + 6^2$	$= 13 + 6^2$	
1. Bin. Formel	$(x + 6)^2$	$= 49$	$\mid \sqrt{}$
	$x + 6$	$= \pm 7$	$\mid - 6$
	x_1	$= + 1$	

Quadratische Gleichungen x^2

2. Lösung mit der quadratischen Ergänzung:

	$x^2 + 12x - 13 = 0$	$\mid +13$
	$x^2 + 12x = 13$	
DER Faktor	$x^2 + 12x = 13$	
DIE Hälfte	$x^2 + 12x + 6$	
Das Quadrat	$x^2 + 12x + 6^2$	
rechte Seite:	$x^2 + 12x + 6^2 = 13 + 6^2$	
1. Bin. Formel	$(x + 6)^2 = 49$	$\mid \sqrt{}$
	$x_{1/2} + 6 = \pm 7$	$\mid -6$
	$x_1 = +1$	
	$x_2 = -13$	

3. Lösung mit der p-q-Formel:

Hierzu muss die quadratische Gleichung in der Normalform gegeben sein:

$$x^2 + px + q = 0$$

Beispiel:

$$x^2 + 12x - 13 = 0$$

daraus folgt:

$$p = 12 \qquad q = -13$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12 q = -13

Diese beiden Zahlenwerte werden dann in die p-q-Formel eingegeben:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{49}$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm 7$$

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm 7$$

$$x_1 = 1$$

Quadratische Gleichungen

x^2

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm 7$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -13$$

Quadratische Gleichungen x^2

3. Lösung mit der p-q-Formel:

p = 12

q = -13

$$x_{1/2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - (-13)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 + 13}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{49}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm 7$$

Lösungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -13 \end{array}}$$